

Раздел: «Величины и их измерения»

Тема: «Понятие величины»

План:

1. Понятие величины и ее свойства
2. Измерение положительной скалярной величины

1. Понятие величины и ее свойства

Первоначальное знакомство с величинами происходит в начальной школе, где величина наряду с числом является ведущим понятием.

Рассмотрим два высказывания, в которых используется слово «длина»:

- 1) Многие окружающие нас предметы имеют длину.
- 2) Стол имеет длину.

В первом предложении утверждается, что длиной обладают объекты некоторого класса. Во втором речь идет о том, что длиной обладает конкретный объект из этого класса. Термин «длина» употребляется для обозначения свойства либо класса объектов (предметы имеют длину), либо конкретного объекта из этого класса (стол имеет длину).

Но чем это свойство отличается от других свойств объектов этого класса? Так, например, стол может иметь не только длину, но и быть изготовленным из дерева или металла; столы могут иметь разную форму. О длине можно сказать, что разные столы обладают этим свойством в разной степени (один стол может быть длиннее или короче другого), чего не скажешь о форме - один стол не может быть «прямоугольнее» другого.

Таким образом, свойство «иметь длину» - особое свойство объектов, оно проявляется тогда, когда объекты сравнивают по их протяженности (по длине). В процессе сравнения устанавливают, что либо два объекта имеют одну и ту же длину, либо длина одного меньше (больше) длины другого.

Аналогично можно рассматривать и другие известные величины: площадь, массу, время и т.д. Они *представляют собой особые свойства окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравнении предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.*

Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называются *величинами одного рода* или *однородными величинами*. Например, длина стола и длина комнаты - это величины одного рода. Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют *величинами разного рода*, или *разнородными величинами*. Так, например, длина и масса - это разнородные величины.

Основные свойства однородных величин.

1. Для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше», и для любых величин A и B справедливо одно и только одно из отношений: $A < B$, $A = B$, $A > B$.

Например, мы говорим, что длина гипотенузы прямоугольного треуголь-

ника больше, чем длина любого катета этого треугольника, масса яблока меньше массы арбуза, а длины противоположных сторон прямоугольника равны.

2. Отношение «меньше» для однородных величин транзитивно: если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$.

Так, если площадь треугольника F_1 меньше площади треугольника F_2 , и площадь треугольника F_2 меньше площади треугольника F_3 , то площадь треугольника F_1 меньше площади треугольника F_3 .

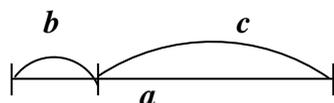
3. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода. Иными словами, для любых двух величин A и B однозначно определяется величина $C = A + B$, которую называют суммой величин A и B .

Сложение величин коммутативно и ассоциативно. Например, если A - масса арбуза, а B - масса дыни, то $C = A + B$ - это масса арбуза и дыни. Очевидно, что $A + B = B + A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$.

4. Величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение.

Разностью величин A и B называется такая величина $C = A - B$, что $A = B + C$. Разность величин A и B существует тогда и только тогда, когда $A > B$.

Например, если A - длина отрезка a , B - длина отрезка b , то $C = A - B$ - это длина отрезка c .



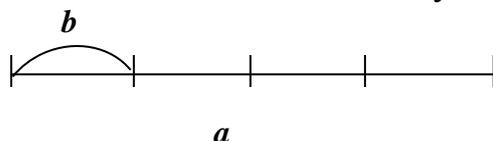
5. Величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода. Более точно, для любой величины A и любого положительного действительного числа x существует единственная величина $B = x \cdot A$, которую называют произведением величины A на число x .

Например, если A - время, отводимое на один урок, то умножив A на число $x = 3$, получим величину $B = 3 \cdot A$ - время, за которое пройдет 3 урока.

6. Величины одного рода можно делить, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число.

Частным величин A и B называется такое положительное действительное число $x = A : B$, что $A = x \cdot B$.

Так, если A - длина отрезка a , B - длина отрезка b и отрезок a состоит из 4 отрезков, равных b , то $A : B = 4$, поскольку $A = 4 \cdot B$.



2. Измерение положительной скалярной величины

Величины, как свойства объектов, обладают еще одной особенностью - их можно оценивать количественно. Для этого величину надо измерить. Чтобы

осуществить измерение, из данного рода величин выбирают величину, которую называют единицей измерения. Мы будем обозначать ее буквой E .

Если задана величина A и выбрана единица величины E (того же рода), то **измерить величину A - это значит найти такое положительное действительное число x , что $A = x \cdot E$.**

Число x называется *численным значением величины A* при единице величины E . Оно показывает, во сколько раз величина A больше (или меньше) величины E , принятой за единицу измерения.

Если $A = x \cdot E$, то число x называют также *мерой величины A* при единице E и пишут $x = m_E(A)$.

Например, если A - длина отрезка a , E - длина отрезка b , то $A = 4 \cdot E$. Число 4 - это численное значение длины A при единице длины E , или, другими словами, число 4 - это мера длины A при единице длины E .

В практической деятельности при измерении величин люди пользуются стандартными единицами величин: так, длину измеряют в метрах, сантиметрах и т.д. Результат измерения записывают в таком виде: 2,7 кг; 13 см; 16 с. Исходя из понятия измерения любую величину можно представить в виде произведения некоторого числа и единицы этой величины. Например, 2,7 кг = 2,7 · 1кг; 13 см = 13 · 1см; 16 с = 16 · 1с.

Используя это представление, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой. Пусть, например, требуется выразить $\frac{5}{12}$ ч в минутах. Так как

$$\frac{5}{12} \text{ ч} = \frac{5}{12} \cdot 1 \text{ ч} \text{ и } 1 \text{ час} = 60 \text{ мин, то } \frac{5}{12} \text{ ч} = \frac{5}{12} \cdot 60 \text{ мин} = \left(\frac{5}{12} \cdot 60\right) \text{ мин} = 25 \text{ мин.}$$

Величина, которая определяется одним численным значением, называется *скалярной величиной*. Кроме скалярных величин, в математике рассматривают ещё векторные величины. Для определения векторной величины необходимо указать не только её численное значение, но и направление. Векторными величинами являются сила, ускорение, напряжённость электрического поля и другие.

В начальной школе рассматриваются только скалярные величины.

Если при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют *положительной скалярной величиной*.

Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

1. Если величины A и B измерены при помощи единицы величины E , то отношения между величинами A и B будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$$A = B \Leftrightarrow m(A) = m(B);$$

$$A < B \Leftrightarrow m(A) < m(B);$$

$$A > B \Leftrightarrow m(A) > m(B).$$

Например, если массы двух тел таковы, что $A = 5$ кг, $B = 3$ кг, то можно утверждать, что $A > B$, поскольку $5 > 3$.

2. Если величины A и B измерены при помощи единицы величины E , то для нахождения численного значения суммы $A + B$ достаточно сложить численные значения величин A и B :

$$A + B = C \Rightarrow m(A + B) = m(A) + m(B).$$

Например, если $A = 5$ кг, $B = 3$ кг, то $A + B = 5$ кг + 3 кг = $(5 + 3)$ кг = 8 кг.

3. Если величины A и B таковы, что $B = x \cdot A$, где x - положительное действительное число, и величина A измерена при помощи единицы величины E , то, чтобы найти численное значение величины B при единицы E , достаточно число x умножить на число $m(A)$:

$$B = x \cdot A \Rightarrow m(B) = x \cdot m(A).$$

Например, если масса B в 3 раза больше массы A и $A = 2$ кг, то $B = 3A = 3 \cdot (2 \cdot 1\text{кг}) = (3 \cdot 2) \cdot 1\text{кг} = 6$ кг.

В математике при записи произведения величины A на число x принято число писать перед величиной, т.е. $x \cdot A$. Но разрешается писать и так: $A \cdot x$. Тогда численное значение величины A умножают на x , если находят значение величины $A \cdot x$.

Рассмотренные понятия - объект (предмет, явление, процесс), его величина, численное значение величины, единица величины - надо уметь вычленять в текстах и задачах. Например, математическое содержание предложения «Купили 3 килограмма яблок» можно описать следующим образом: в предложении рассматривается такой объект, как яблоки, и его свойство - масса; для измерения массы использовали единицу массы - килограмм; в результате измерения получили число 3 - численное значение массы яблок при единице массы - килограмм.

Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Например, для человека - это рост, масса, возраст и др. Процесс равномерного движения характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем, между которыми существует зависимость, выражаемая формулой $s = vt$.

Тема: «Длина отрезка. Величина угла»

План:

1. *Длина отрезка и ее измерение.*
2. *Величина угла и ее измерение.*

1. Длина отрезка и ее измерение

В геометрии длина - это величина, характеризующая протяженность отрезка, а также других линий (ломаной, кривой). При определении длины отрезка будем использовать понятие «отрезок состоит из отрезков».

Определение. *Длиной отрезка называется положительная величина, обладающая следующими свойствами:*

- 1) *равные отрезки имеют равные длины;*
- 2) *если отрезок состоит из двух отрезков, то его длина равна сумме длин его частей.*

Эти свойства длины отрезка используются при ее измерении. Чтобы измерить длину отрезка, нужно иметь единицу длины. В геометрии такой единицей является длина произвольного отрезка.

Результатом измерения длины отрезка является положительное действительное число - его называют *численным значением длины отрезка* при выбранной единице длины или *мерой длины* данного отрезка. Если обозначить длину отрезка буквой X , единицу длины - E , а получаемое при измерении действительное число - буквой a , то можно записать: $a = m_E(X)$ или $X = a \cdot E$.

Получаемое при измерении длины отрезка положительное действительное число должно удовлетворять ряду требований:

1. Если два отрезка равны, то численные значения их длин тоже равны.
2. Если отрезок x состоит из отрезков x_1 и x_2 , то численное значение его длины равно сумме численных значений длин отрезков x_1 и x_2 .
3. При замене единицы длины численное значение длины данного отрезка увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.
4. Численное значение длины единичного отрезка равно единице.

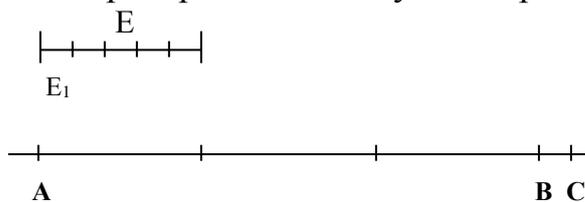
Доказано, что положительное действительное число, являющееся мерой длины заданного отрезка, всегда существует и единственно. Доказано также, что для каждого положительного действительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Заметим, что часто, ради краткости речи, численное значение длины отрезка называют просто длиной. Например, в задании «Найдите длину данного отрезка» под словом «длина» подразумевается численное значение длины отрезка. Не менее часто допускают и другую вольность - говорят: «Измерь отрезок» вместо «Измерь длину отрезка».

Задача. Построить отрезок, длина которого $3,2E$. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины E увеличить в 3 раза ?

Решение. Построим произвольный отрезок и будем считать его единичным. Затем построим прямую, отметим на ней точку A и отложим от нее 3 отрезка,

длины которых равны E . Получим отрезок AB , длина которого $3E$.



Чтобы получить отрезок длиной $3,2E$, надо ввести новую единицу длины. Для этого единичный отрезок надо разбить либо на 10 равных частей, либо на 5, поскольку $0,2 = \frac{1}{5}$. Если от точки B отложить отрезок, равный $\frac{1}{5}$ единичного, то длина отрезка AC будет равна $3,2E$.

Чтобы выполнить второе требование задачи, воспользуемся свойством 3, согласно которому при увеличении единицы длины в 3 раза численное значение длины данного отрезка уменьшается в 3 раза. Разделим $3,2$ на 3, получим: $3,2:3 = 3\frac{1}{5}:3 = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$. Таким образом, при единице длины $3E$ численное значение длины построенного отрезка AC будет равно $1\frac{1}{15}$.

2. Величина угла и ее измерение

Каждый угол имеет величину. Специального названия для нее в геометрии нет.

Определение. *Величиной угла называется положительная величина, определенная для каждого угла так, что:*

- 1) *равные углы имеют равные величины;*
- 2) *если угол состоит из двух углов, то его величина равна сумме величин его частей.*

Эти свойства лежат в основе измерения величины угла. Оно аналогично измерению длины отрезка и состоит в сравнении измеряемой величины угла с величиной угла, принятой за единицу. Единичный угол, а если нужно и его доли, откладываются на угле, величина которого измеряется. В результате получается численное значение величины угла или мера величины угла при данной единице измерения.

Число, которое получается в результате измерения величины угла, должно удовлетворять ряду требований - они аналогичны требованиям, предъявляемым к числовому значению длины отрезка.

На практике за единицу величины угла принимают градус - $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Один градус записывают так: 1° . Величина прямого угла равна 90° , величина развернутого - 180° .

Градус делится на 60 минут, а минута на 60 секунд. Одну минуту обозначают $1'$, одну секунду - $1''$. Так, если мера величины угла равна 5 градусам 3 минутам и 12 секундам, то пишут $5^\circ 3' 12''$. Если нужна большая точность в из-

мерении величин углов, используют и доли секунды.

Заметим, что часто вместо «величина угла» говорят «угол». Например, вместо «величина угла равна 45 градусам» говорят, что «угол равен 45 градусам».

На практике величины углов измеряют с помощью транспортира. Для более точных измерений пользуются и другими приборами.

Для численных значений величины угла выполняются свойства, аналогичные свойствам численных значений длин отрезков.

1. Если два угла равны, то меры их величин также равны, и обратно: если меры величин углов равны, то равны и сами углы.
2. Больший угол имеет большую меру, и обратно: если мера величины одного угла больше меры величины другого, то первый угол больше второго.
3. При сложении величин углов меры их складываются, а при вычитании – вычитаются.

Тема: «Площадь фигуры и ее измерение. Объем тела»

План:

1. Понятие площади фигуры. Измерение.
2. Площадь многоугольника.
3. Равновеликие и равноставленные фигуры.
4. Площадь произвольной плоской фигуры и ее измерение
5. Объём тела и его измерение

Цель занятия: обобщение материала, известного из школьного курса математики и именно того материала, который будет использован в профессиональной деятельности, т.к. такая величина как площадь фигуры изучается в начальном курсе младшими школьниками.

1. Понятие площади фигуры и ее измерение

Каждый человек представляет, что такое площадь комнаты, площадь участка земли, площадь поверхности, которую надо покрасить. Он также понимает, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что площадь квартиры складывается из площади комнат и площади других ее помещений.

Это обыденное представление о площади используется при ее определении в геометрии, где говорят о площади фигуры. Но геометрические фигуры устроены по-разному, и поэтому, *когда говорят о площади, выделяют определенный класс фигур*. Например, рассматривают площадь многоугольника, площадь произвольной плоской фигуры, площадь поверхности многогранника и др. Будем рассматривать только площадь многоугольника и произвольной плоской фигуры.

Так же, как и при рассмотрении длины отрезка и величины угла, будем использовать понятие «состоять из», определяя его следующим образом: *фигура F состоит (составлена) из фигур F_1 и F_2 , если она является их объединением и у них нет общих внутренних точек*. В этой же ситуации можно говорить, что фигура F разбита на фигуры F_1 и F_2 .



Рис. 1

Например, о фигуре F , изображенной на рисунке 1а), можно сказать, что она состоит из фигур F_1 и F_2 , поскольку они не имеют общих внутренних точек. Фигуры F_1 и F_2 на рисунке 1,б) имеют общие внутренние точки, поэтому нельзя утверждать, что фигура F состоит из фигур F_1 и F_2 .

Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2 , то пишут: $F = F_1 \oplus F_2$.

Определение. *Площадью фигуры называется положительная величина*

на, определенная для каждой фигуры так, что:

- 1) равные фигуры имеют равные площади;
- 2) если фигура состоит из двух частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

Если сравнить данное определение с определением длины отрезка, то увидим, что площадь характеризуется теми же свойствами, что и длина, но заданы они на разных множествах: длина - на множестве отрезков, а площадь - на множестве плоских фигур.

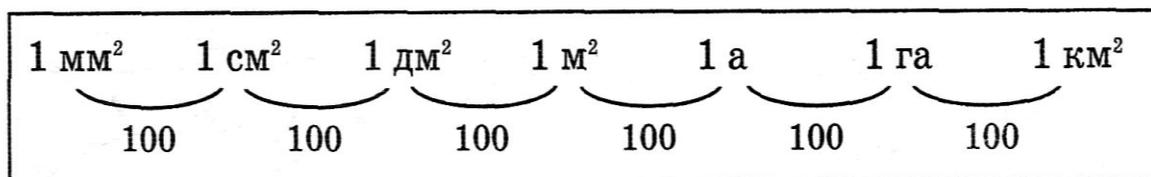
Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, такой *единицей является площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку*. Часто математики место слов «нахождение площади» говорят «квадрирование». Условимся площадь единичного квадрата обозначать буквой E , а число, которое получается в результате измерения площади фигуры - $S(F)$. Это число называют *численным значением площади* фигуры F при выбранной единице площади E .

Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью единичного квадрата E . Результатом этого сравнения является число. Оно должно удовлетворять *условиям*:

1. Число $S(F)$ - положительное.
2. Если фигуры равны, то равны численные значения их площадей.
3. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2 , то численное значение площади фигуры равно сумме численных значений площадей фигур F_1 и F_2 .
4. При замене единицы площади численное значение площади данной фигуры F увеличивается (уменьшается) во столько же раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.
5. Численное значение площади единичного квадрата принимается равным 1, т.е. $S(E) = 1$.
6. Если фигура F_1 является частью фигуры F_2 , то численное значение площади фигуры F_1 не больше численного значения площади фигуры F_2 , т.е. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow S(F_1) \leq S(F_2)$.

В геометрии доказано, что для многоугольников и произвольных плоских фигур такое число всегда существует и единственно для каждой фигуры.

В практической деятельности для измерения площадей пользуются следующими единицами:



При переходе от одной квадратной единицы к другой сторона квадрата увеличивается в 10 раз, поэтому площадь увеличивается в 100 раз.

1 ар (квадрат со стороной 10 м) и **1 гектар (квадрат со стороной 100 м)** – это промежуточные квадратные единицы. Они введены для удобства в связи с измерением земельных участков. Ар часто называют **соткой**.

Названия единиц измерения всегда произносятся полностью.

Единицы площади претерпели изменения в процессе исторического развития. Например, было время когда в качестве единиц площади выступали: колодец (площадь, которую можно полить из одного колодца), соха или плуг (средняя площадь, обработанная за день сохой или плугом) и др. В старину также площади земельных участков измеряли в десятинах (это площадь квадрата со стороной, равной десятой части версты). В настоящее время существует Международной системы единиц (СИ).

2. Площадь многоугольника

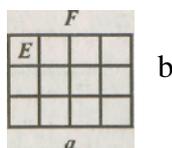
Формулы для вычисления площади прямоугольника, треугольника, параллелограмма были выведены давно. В геометрии их обосновывают, исходя из определения площади, при этом численное значение называют площадью, а численное значение длины отрезка – длиной.

Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению длин соседних его сторон.

Слово «площадь» в этой формулировке означает численное значение площади, а слово «длина» – численное значение длины отрезка.

Доказательство. Если F – данный прямоугольник, а числа a, b – длины его сторон, то $S(F) = a \cdot b$. Докажем это.

Пусть a и b – натуральные числа. Тогда прямоугольник F можно разбить на единичные квадраты: $F = E \oplus E \oplus E \oplus \dots \oplus E$. Всего их $a \cdot b$, так как имеем b рядов, в каждом из которых a квадратов. Отсюда $S(F) = \underbrace{S(E) + S(E) + \dots + S(E)}_{ab \text{ слагаемых}} = a \cdot b \cdot \underbrace{S(E)}_1 = a \cdot b$.



Пусть теперь a и b – положительные рациональные числа: $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, где m, n, p, q – натуральные числа.

Приведем данные дроби к общему знаменателю: $a = \frac{mq}{nq}$, $b = \frac{np}{nq}$.

Разобьем сторону единичного квадрата E на nq равных частей. Если через точки деления провести прямые, параллельные сторонам, то квадрат E разделится на $(nq)^2$ более мелких квадратов. Обозначим площадь каждого такого квадрата E_1 . Тогда $S(E) = (nq)^2 \cdot S(E_1)$, а поскольку $S(E) = 1$, то $S(E_1) = \frac{1}{(nq)^2}$.

Так как $a = \frac{mq}{nq}$, $b = \frac{np}{nq}$, то отрезок длиной $\frac{1}{nq}$ укладывается на стороне a точно mq раз, а на стороне b – точно np раз. Поэтому данный прямоугольник F будет состоять из $mqnp$ квадратов E_1 . Следовательно,

$$S(F) = mq \cdot np \cdot S(E_1) = mq \cdot np \cdot \frac{1}{(nq)^2} = \frac{mq}{nq} \cdot \frac{np}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = a \cdot b.$$

Таким образом, доказано, что если длины сторон прямоугольника выражены положительными рациональными числами a и b , то площадь этого прямоугольника вычисляется по формуле $S(F) = a \cdot b$.

Случай, когда длины сторон прямоугольника выражаются положительными действительными числами, мы опускаем.

Следствие: площадь квадрата $S = a^2$.

Из этой теоремы вытекает **следствие: площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.**

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Доказательство. Пусть $ABCD$ - параллелограмм, не являющийся прямоугольником. Опустим перпендикуляр CE из вершины C на прямую AD . Тогда $S(ABCE) = S(ABCD) + S(CDE)$.

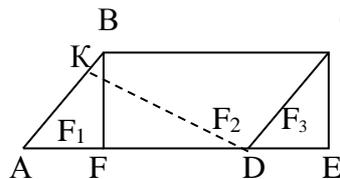
Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямую AD . Тогда $S(ABCE) = S(BCEF) + S(ABF)$.

Так как треугольники ABF и CDE равны, то равны и их площади.

Отсюда следует, что $S(ABCD) = S(BCEF)$, т.е. площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $BCEF$ и равна $BC \cdot BF$, а так как $BC = AD$, то $S(ABCD) = AD \cdot BF$.

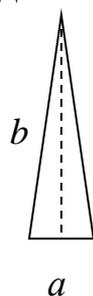
Вопрос: Это единственная формула площади для данного параллелограмма?

Ответ: Если провести высоту DK к меньшей стороне, то площадь параллелограмма $ABCD$ можно вычислить по формуле $S(ABCD) = DK \cdot AB$.



Из этой теоремы вытекает **следствие: площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.**

В египетских папирусах, например, предлагается находить площадь равнобедренного треугольника как произведение половины основания на боковую сторону, хотя для любого равнобедренного треугольника с малым углом при вершине, противоположной к основанию такой способ дает приближенное значение площади.



$$S = \frac{1}{2} ab$$

Формула нахождения площади треугольника не единственна. На сего-

дняшний день существует несколько формул, в частности формула Герона, формула, связанная с синусом угла и т.д. Можно использовать любую из них.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \quad (a, b - \text{длины сторон, } \alpha - \text{угол между ними})$$

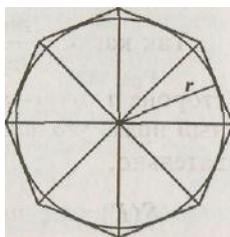
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (p - \text{полупериметр, } a, b, c - \text{длины сторон})$$

Определение. *Фигуры, у которых площади равны, называются равно-великими.*

Заметим, что слова «сторона» и «высота» в данных утверждениях означают численные значения длин соответствующих отрезков.

Теорема. *Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.*

Если периметр правильного многоугольника обозначить буквой P , радиус вписанной окружности – r , а площадь правильного многоугольника – S , то, согласно данной теореме, $S = \frac{1}{2} P r$.



Доказательство. Разобьем правильный n -угольник на n треугольников, соединяя отрезками вершины n -угольника с центром вписанной окружности. Эти треугольники равны. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2} a_n \cdot r$, где a_n – сторона правильного n -угольника. Тогда площадь многоугольника равна $\frac{1}{2} a_n \cdot r \cdot n$, но $a_n \cdot n = P$. Следовательно, $S = \frac{1}{2} P r$.

Если F – произвольный многоугольник, то его площадь находят разбивая многоугольник на треугольники (или другие фигуры, для которых известны правила вычисления площади).

Над этой задачей ученые трудились не один год, потому как верные способы нахождения простейших геометрических фигур были придуманы далеко не сразу. Например, древние вавилоняне считали, что площадь четырехугольника равна произведению полусуммы противоположных сторон. Лишь после открытия верной формулы для площади треугольника (а неверных было предостаточно) стало возможным вычислять площадь любого многоугольника, разделив его предварительно, скажем, на треугольники.

В связи с этим возникает *вопрос*: если один и тот же многоугольник по-разному разбить на части и найти их площади, то будут ли полученные суммы площадей частей многоугольника одинаковыми?

Ответ: Конечно же, **всякий многоугольник можно многими способами разрезать на части**. Доказано, что условиями, сформулированными в опреде-

лении площади, площадь всякого многоугольника определена однозначно.

Поэтому кроме равенства и равновеликости фигур в геометрии рассматривают отношение равносоставленности. С ним связаны важные свойства фигур.

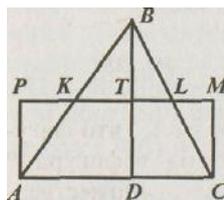
Определение. Многоугольники F_1 и F_2 называются *равносоставленными*, если их можно разбить на соответственно равные части.

Например, равносоставлены параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $FBCE$, так как параллелограмм состоит из фигур F_1 и F_2 , а прямоугольник - из фигур F_2 и F_3 , причем $F_1 = F_3$.

Нетрудно убедиться в том, что *равносоставленные фигуры равновелики*. Венгерским математиком Ф.Бойяи и немецким любителем математики П.Гервином была доказана *теорема: любые два равновеликих многоугольника равносоставлены*. Другими словами, если два многоугольника имеют равные площади, то их всегда можно представить состоящими из попарно равных частей.

Теорема Бойяи-Гервина служит теоретической базой для решения задач на перекраивание фигур: одну разрезать на части и сложить из нее другую. Оказывается, что если данные фигуры многоугольные и имеют одинаковые площади, то задача непременно разрешима.

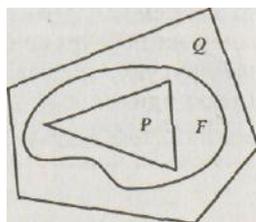
Доказательство теоремы Бойяи-Гервина достаточно сложное. Докажем только утверждение о том, что *всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником*, т.е. всякий треугольник можно перекроить в равновеликий ему прямоугольник.



Пусть дан треугольник ABC . Проведем в нем *высоту* BD и *среднюю линию* KL . Построим прямоугольник, одной стороной которого является AC , а другая лежит на прямой KL . Так как пары треугольников APK и KBT , а также CLM и TBL равны, то треугольник ABC и прямоугольник $APMC$ равносоставлены.

3. Площадь произвольной плоской фигуры и ее измерение

С развитием науки и техники возникла острая потребность вычислять площадь не только многоугольников, но и произвольных фигур. Первые шаги здесь сделали Архимед и итальянский монах Бонавентура Кавальери, а окончательно решили эту проблему И.Ньютон и Г.Лейбниц, создавшие интегральное исчисление, частью которого является и вычисление площадей фигур, ограниченных заданными кривыми. На основе методов интегрирования были сконструированы разнообразные планиметры – приборы, с помощью которых можно измерять площадь фигуры, обводя границу этой фигуры специальным указателем.



Пусть F — произвольная плоская фигура. В геометрии считают, что она имеет площадь $S(F)$, если выполняются следующие условия: существуют многоугольные фигуры, которые содержат F (назовем их объемлющими); существуют многоугольные фигуры, которые содержатся в F (назовем их входящими); площади этих многоугольных фигур как угодно мало отличаются от $S(F)$. Поясним эти положения. На рисунке 1 показано, что фигура Q содержит фигуру F , т.е. Q - объемлющая фигура, а фигура P содержится в F , т.е. P - входящая фигура. На теоретико-множественном языке это означает, что $P \subset F \subset Q$ и, следовательно, можно записать, что $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$.

Если разность площадей объемлющей и входящей фигур может стать как угодно малой, то, как установлено в математике, существует единственное число $S(F)$, удовлетворяющее неравенству $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$ для любых многоугольных фигур P и Q . Данное число и считают площадью фигуры F .

Этими теоретическими положениями пользуются, например, когда выводят формулу **площади круга**. Для этого в круг F радиуса r вписывают правильный n -угольник P , а около окружности описывают правильный n -угольник Q . Если обозначить символами $S(Q)$ и $S(P)$ площади этих многоугольников, то будем иметь, что $S(P) \leq S(F) \leq S(Q)$, причем при возрастании числа сторон вписанных и описанных многоугольников площади $S(P)$ будут увеличиваться, оставаясь при этом меньше площади круга, а площади $S(Q)$ будут уменьшаться, но оставаться больше площади круга.

Площадь правильного n -угольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной в него окружности. При возрастании числа его сторон периметр стремится к длине окружности $2\pi r$, а площадь - к площади круга. Поэтому $S_{\text{кр}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$.

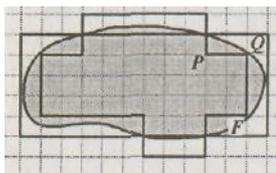
Любопытный факт: В настоящее время существует неразрешимая задача под названием «квадратура круга», связанная с построением с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Доказано невозможность такого построения (хотя и существуют изящные приближенные способы такого построения).

Для приближенного измерения площадей плоских фигур можно использовать различные приборы, в частности, палетку.

Палетка - это прозрачная пластина, на которой нанесена сеть квадратов. Сторона квадрата принимается за 1, и чем меньше эта сторона, тем точнее можно измерить площадь фигуры.

Накладываем палетку на данную фигуру F . Квадраты, которые целиком лежат внутри фигуры F , образуют многоугольную фигуру P ; квадраты, имею-

щие с фигурой F общие точки и целиком лежащие внутри фигуры F , образуют многоугольную фигуру Q .



Площади $S(P)$ и $S(Q)$ находят простым подсчетом квадратов. За приближенное значение площади фигуры F принимается среднее арифметическое найденных площадей:

$$S(F) = \frac{S(Q) + S(P)}{2}.$$

В начальном курсе математики учащиеся измеряют площади фигур с помощью палетки таким образом: подсчитывают число квадратов, которые лежат внутри фигуры F , и число квадратов, через которые проходит контур фигуры; затем второе число делят пополам и прибавляют к первому. Полученную сумму считают площадью фигуры F .

Нетрудно обосновать эти действия. Пусть m - число квадратов, которые поместились внутри фигуры F , а n - число квадратов, через которые проходит контур фигуры F . Тогда

$$S(P) = m, \text{ а } S(Q) = m + n.$$

$$\text{И значит, } S(F) = \frac{m + (m + n)}{2} = \frac{2m + n}{2} = m + \frac{n}{2}.$$

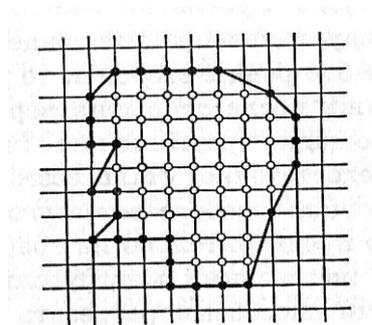
Палетка позволяет измерить площадь фигуры F с определенной точностью. Чтобы получить более точный результат, нужно взять палетку с более мелкими квадратами. Но можно поступить иначе: наложить одну и ту же палетку на фигуру по-разному и найти несколько приближенных значений площади фигуры F . Их среднее арифметическое может быть лучшим приближением к численному значению площади фигуры F .

Такой способ оценки площади лежит в основе современного понятия площади произвольной фигуры: площадью называется предел, к которому стремятся полученные величины, если брать палетки со все более мелкими клетками, в случае, если такой предел существует.

Любопытный факт: площадь многоугольника, все вершины которого лежат в узлах квадратной сетки, выражается формулой (формулой Пика):

$$S = n + \frac{m}{2} - 1,$$

где n - количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника, а m - количество узлов сетки, лежащих на его границе (в частности, в вершинах).



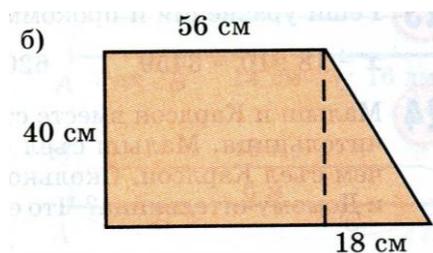
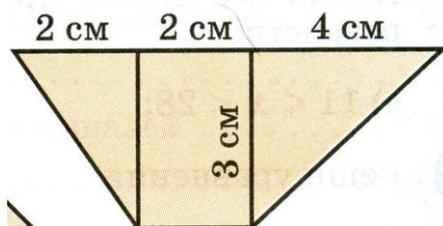
Вывод – итог: такие величины как длина, площадь, величина угла характеризуются одинаковыми свойствами, но заданы на разных классах фигур: длина – на множестве отрезков, величина угла – на множестве углов, площадь – на множестве фигур (многоугольных и криволинейных).

Рассмотрели:

- косвенные способы вычисления площадей прямоугольника, треугольника, параллелограмма, произвольного многоугольника,
- взаимосвязь равновеликости и равноставленности многоугольных фигур,
- обосновали способ измерения площади фигуры при помощи палетки.

Задание из учебника Математики 3 класс автора Петерсон Л.Г. для самостоятельной работы

Вычислите площадь фигуры



Результат выразите в квадратных дециметрах

Тема: «Объём, масса тела. Промежутки времени. Другие величины, рассматриваемые в начальном курсе математики»

План:

1. *Объём тела и его измерение*
2. *Масса тела и ее измерение*
3. *Промежутки времени и их измерение.*
4. *Другие величины, изучаемые в начальном курсе математики. Зависимости между величинами*

Объём тела и его измерение.

Понятие объёма определяется так же, как понятие площади. Но при рассмотрении понятия площадь, мы рассматривали многоугольные фигуры, а при рассмотрении понятия объём мы будем рассматривать многогранные фигуры. *Объём характеризует вместимость.*

Определение. *Объёмом фигуры называется неотрицательная величина, определённая для каждой фигуры так, что:*

- 1) *равные фигуры имеют один и тот же объём;*
- 2) *если фигура составлена из конечного числа фигур, то её объём равен сумме их объёмов.*

Условимся объём фигуры F обозначать $V(F)$.

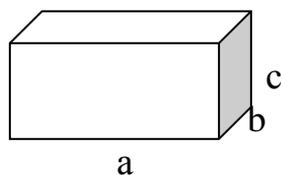
Чтобы измерить объём фигуры, нужно иметь единицу объёма. Как правило, за единицу объёма принимают объём куба с гранью, равной единичному отрезку, то есть отрезку, выбранному в качестве единицы длины.

Измерение объёма данной фигуры состоит в сравнении его с объёмом единичного куба. Результатом этого сравнения является число $V(x)$.

Число $V(x)$ называют численным значением объёма при выбранной единице объёма.

На практике для измерения объёмов применяют следующие единицы: мм^3 , см^3 , дм^3 , м^3 , км^3 . Литр — это кубический дециметр.

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений (длины, ширины и высоты).



$$V = a \cdot b \cdot c$$

На Руси в старину использовались в качестве единиц измерения объёма ведро (около 12 л), штоф (десятая часть ведра). В США, Англии и других странах используются баррель (около 159 л), галлон (около 4 л), бушель (около 36 л), пинта (от 470 до 568 кубических сантиметров).

Масса тела и ее измерение

Масса – одна из основных физических величин. Понятие массы тела связано с понятием веса – силы, с которой тело притягивается Землей. Поэтому вес тела зависит не только от самого тела. Например, он различен на различных широтах: на полюсе тело весит на 0,5% больше, чем на экваторе. Однако при своей изменчивости вес обладает особенностью: отношение весов двух тел в любых условиях остается неизменным. При измерении веса тела путем сравнения его с весом другого выявляется новое свойство тел, которое называется массой.

Для сравнения двух предметов по массе их взвешивают. Если чаши весов уравниваются, то предметы имеют одинаковую массу, если же чаши не уравниваются, то предмет, находящийся на той чаше, которая перетягивает, имеет большую массу, второй предмет – меньшую.

Если тело взвесили на рычажных весах на экваторе, а затем тело и гири перенесли на полюс, то взвешивание на полюсе даст тот же результат, что на экваторе, поскольку и тело и гири изменят свой вес одинаково. Таким образом, масса тела не изменяется, она одна и та же, где бы тело ни находилось.

Определение. Масса- это такая положительная величина, которая обладает свойствами:

- 1)масса одинакова у тел, уравнивающих друг друга на весах,*
- 2)масса складывается, когда тела соединяются вместе: масса нескольких тел, вместе взятых, равна сумме их масс.*

Если сравнить данное определение массы с определениями длины и площади, то увидим, что масса характеризуется теми же свойствами, что и длина и площадь, но задана она на множестве физических тел.

Измерение массы производится с помощью весов. Происходит это следующим образом. Выбираем тело e , масса которого принимается за единицу. Предполагается, что можно взять и доли этой массы. Например, если за единицу массы взять килограмм, то в процессе измерения можно использовать и такую же его долю, как грамм: $1\text{г} = \frac{1}{1000}\text{ кг}$.

На одну чашу весов кладут тело, массу которого измеряют, а на другую – тела, выбранные в качестве единицы массы, т.е. гири. Этим гири должно быть столько, чтобы они уравнивали первую чашку весов. В результате взвешивания получается численное значение массы данного тела при выбранной единице массы. Это значение приближенное. Например, если масса тела равна 5 кг 350 г, то число 5350 следует рассматривать как приближенное значение массы данного тела.

Для численных значений массы справедливы все утверждения, сформулированные для длины, т.е. сравнение масс, действия над ними сводятся к сравнению и действиям над численными значениями масс.

Основная единица массы – килограмм. Из этой основной единицы образуются другие единицы массы: грамм, тонна и пр.

Промежутки времени и их измерение

Понятие времени более сложное, чем понятие длины и массы. В обыденной жизни время— это то, что отделяет одно событие от другого. В математике и физике время рассматривают как скалярную величину, потому что промежутки времени обладают свойствами, похожими на свойства длины, площади, массы.

Промежутки времени можно сравнивать. Например, на один и тот же путь пешеход затратит больше времени, чем велосипедист.

Промежутки времени можно складывать. Так, лекция в институте длится столько же времени, сколько два урока в школе. Промежутки времени можно вычитать, умножать на положительное действительное число.

Промежутки времени измеряют. Но процесс измерения времени отличается от измерения длины. Для измерения длины можно многократно использовать линейку, перемещая ее от точки к точке. Промежуток времени, принятый за единицу, может быть использован лишь один раз. Поэтому единицей времени должен быть регулярно повторяющийся процесс. Такой единицей в Международной системе единиц названа секунда. Наряду с секундой используются и другие единицы времени: минута, час, сутки, год, неделя, месяц, век. Такие единицы, как год и сутки, были взяты из природы, а час, минута, секунда придуманы человеком.

Год— это время обращения Земли вокруг солнца. Сутки— время обращения Земли вокруг своей оси. Год состоит приблизительно из $365\frac{1}{4}$ сут. Но год жизни людей складывается из целого числа суток. Поэтому вместо того, чтобы к каждому году прибавлять 6 часов, прибавляют целые сутки к каждому четвертому году. Этот год состоит из 366 дней и называется високосным.

Календарь с таким чередованием лет ввел в 46 году до н.э. римский император Юлий Цезарь в целях упорядочивания существующего в то время запутанного календаря. Поэтому новый календарь называется юлианским. Согласно ему новый год начинается с 1 января и состоит из 12 месяцев. Сохранилась в нем и такая мера времени, как неделя, придуманная еще вавилонскими астрономами.

В Древней Руси неделя называлась седмицей, а воскресенье — днем неделным (когда нет дел) или просто неделей, т.е. днем отдыха. Теперь в русском языке день отдыха называется воскресенье — от слова «воскрешать», т.е. придавать силы, оживить. Название следующих пяти дней недели указывают, сколько дней прошло после воскресенья. Понедельник — сразу после недели, вторник — второй день, среда — середина, четверг и пятница — четвертые и пятые сутки, суббота — конец дел.

Месяц не очень определенная единица времени, он может состоять из 30, 31 и 28 дней. Но существует эта единица времени с древних времен и связана с движением Луны вокруг Земли. Один оборот вокруг Земли Луна делает примерно за 29,5 суток и за год она совершает примерно 12 оборотов. Эти данные и послужили основой для создания древних календарей, а результатом их мгно-

венного усовершенствования является тот календарь, который используется в настоящее время.

Юлианский календарь, принятый христианской церковью, распространился среди всех европейских народов и просуществовал более 16 столетий. Но постепенно люди стали замечать, что результаты измерения времени по календарю не сходятся с результатами измерений по Солнцу. Например, 21 марта— день весеннего равноденствия в 16 веке пришелся на 11 марта по календарю. Откуда взялась разница в 10 дней? Они накапливались постепенно, из года в год, поскольку год по юлианскому календарю на 11 минут 14 секунд больше солнечного и за 400 лет набегало примерно трое с лишним суток. Чтобы в дальнейшем расхождение не возникало, в новом григорианском календаре, названном в честь тогдашней главы католической церкви папы Григория XIII и принятом в 1582 году, было уменьшено число високосных лет. По юлианскому календарю високосными были все годы, число которых делилось на 4. По григорианскому из их числа исключались те, которые были «вековыми» и не делились на 400: например, 1600 год— високосный, а 1700, 1800 и 1900 из числа високосных исключались, они содержали по 365 суток. Заглядывая вперед, скажем, 2100, 2200, 2300 годы не будут високосными.

Этот календарь был принят в европейских странах. В России до Великой Октябрьской социалистической революции православная церковь отклонила эту реформу. Здесь жили по юлианскому календарю, что причиняло многие неудобства. Например, телеграмма из-за границы приходила в Россию на 13 дней раньше, чем была отправлена. Много раз русские ученые пытались заставить царское правительство изменить старый календарь, но только декретом Советского правительства 14 февраля 1918 года у нас был введен новый стиль. В соответствии с этим декретом февраль 1918 года был укорочен на 13 дней. После 31 января наступило сразу 14 февраля. С тех пор мы и живем по новому стилю.

Григорианский календарь принят не всеми государствами мира. Например, Египет и другие страны Востока пользуются другим календарем — лунным. Год по этому календарю равен 12 лунным месяцам и короче солнечного на 11 дней. Кроме того, если по григорианскому календарю 1986 год, то, например, в Иране это 1406 год. Чем это вызвано.

Чтобы вести счет, надо иметь начало отсчета. У времени нет начала и нет конца. Оно течет и течет. Поэтому, чтобы считать, нужно самим установить начало счёта. Установить начало суток, года можно разными способами. Так, древние египтяне вели летоисчисление по годам правления фараонов, китайцы— по годам царствования и династиям императоров, римляне— от основания города Рима и от первого года царствования того или иного императора, другие народы— от мифического «сотворения мира» или от «рождения Христа».

В Древней Руси год начинался весной, в марте, когда приступали к полевым работам. С введением христианства на Руси был принят юлианский календарь и начало летоисчисления от «сотворения мира», причём это «сотворение мира» христианская церковь приурочила к 5508 году до «рождества Христова», а началом года считала 1 сентября. Такой отсчёт лет велся на Руси до начала XVIII столетия. Указом Петра I Русское государство перешло на другое летоис-

числение: началом года стало 1 января, а года стали считать не от «сотворения мира», а от «рождества Христова». В соответствии с ним год принятия указа 7208 стал 1700 годом. Счет лет от рождения Христа в настоящее время принят большинством государств и называется нашей эрой (н.э.).

Современное деление суток на 24 ч также восходит к глубокой древности, оно было введено в Древнем Египте. Минута и секунда появились в Древнем Вавилоне, а в том, что в часе 60 мин, а в минуте 60 с, сказывается влияние шестидесятеричной системы счисления, изобретенной вавилонскими учеными.

Другие величины, изучаемые в начальном курсе математики. Зависимости между величинами

Понятие величины, принимающей различные численные значения, является отражением изменчивости окружающей нас действительности. Но всевозможные изменения в реальном мире не происходят независимо друг от друга.

Зависимости между величинами многообразны. Их изучают различные науки. Рассмотрим те, с которыми встречаются учащиеся в начальном курсе математики.

Рассмотрим величины, связанные с равномерным прямолинейным движением: время, скорость и расстояние. Зависимость между временем (t), скоростью (V) и расстоянием (s), пройденным телом при прямолинейном равномерном движении, может быть выражена формулой $S=vt$.

Если движение таково, что скорость принимает одно и то же значение, то зависимость пройденного расстояния от времени прямо пропорциональная, так как выражается формулой вида $y=kx$. Переменная x есть время движения, а переменная y – пройденное расстояние. Коэффициент k обозначает скорость движения. Прямо пропорциональная зависимость между временем и пройденным расстоянием обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) время движения, во столько же раз увеличивается (уменьшается) пройденное расстояние.

Зависимость расстояния прямолинейного равномерного движения от времени (при постоянной скорости) может быть и линейной, т.е. она может выражаться формулой вида $y=kx+b$, где k и b – некоторые данные числа.

Рассмотрим в качестве примера задачу: «Туристы за день прошли пешком 18 км, а остальной путь проехали на автобусе со скоростью 45 км/ч. Какой путь проделали туристы за день, если на автобусе они ехали 2ч? 3ч? 4ч?».

Если туристы на автобусе ехали 2 ч, то всего за день они проехали путь $s=18 \text{ км}+45 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ ч} = 18 \text{ км}+90 \text{ км}=108 \text{ км}$.

Если они ехали на автобусе 3 ч, то всего за день они проехали путь $s=18 \text{ км}+45 \text{ км/ч} \cdot 3 \text{ ч}=153 \text{ км}$. За 4 ч они проехали путь $s=18 \text{ км}+45 \text{ км/ч} \cdot 4=208 \text{ км}$.

Видим, что зависимость между временем и пройденным расстоянием линейная, так как она может быть представлена формулой вида $s=v \cdot t+s_0$, где $s_0=18 \text{ км}$, а $v=45 \text{ км/ч}$.

Если среди величин s , v и t две величины – скорость и время – принимают различные значения, а расстояние постоянно, то зависимость между скоростью и временем движения обратно пропорциональна, так как может быть выражена формулой $y = \frac{k}{x}$, где переменная x есть скорость движения, переменная y – время движения (или наоборот), постоянная k есть расстояние, которое надо пройти телу.

Обратно пропорциональная зависимость между скоростью и временем движения обладает свойством: во сколько раз увеличивается (уменьшается) скорость движения, во столько же раз уменьшается (увеличивается) время, затраченное на движение.

Знание зависимости между величинами, данными в текстовой задаче, позволяет находить различные способы её решения. Рассмотрим, например, задачу: «Из двух городов выехали навстречу друг другу два мотоциклиста. Один мотоциклист двигался со скоростью 90 км/ч и проехал до встречи 180 км. Какое расстояние проехал до встречи другой мотоциклист, если он двигался со скоростью 45 км/ч?».

В задаче речь идет о движении мотоциклистов. Оно характеризуется тремя величинами: скоростью, временем и расстоянием. Согласно условию задачи значения времени движения одинаковы, а скорость и расстояние принимают различные значения. Зависимость между этими последними величинами может быть выражена формулой $s = t \cdot v$, значит, s и v – величины прямо пропорциональные.

Задача может быть решена двумя арифметическими способами.

I способ сводится к отысканию коэффициента t – времени движения мотоциклистов. Зная его и скорость движения второго мотоциклиста, нетрудно найти и расстояние, пройденное им. Чтобы найти время движения мотоциклистов, разделим расстояние, пройденное первым мотоциклистом, на скорость движения: $180 \text{ км} : 90 \text{ км/ч} = 2 \text{ ч}$. Умножив скорость второго мотоциклиста на время его движения, получим путь, пройденный им: $45 \text{ км/ч} \cdot 2 \text{ ч} = 90 \text{ км}$.

II способ решения этой же задачи основан на свойстве прямой пропорциональности: найдём, во сколько раз скорость движения второго мотоциклиста меньше скорости движения первого: $90 \text{ км/ч} : 45 \text{ км/ч} = 2$ раза. Значит, и путь, пройденный вторым мотоциклистом, в 2 раза меньше пути, пройденного первым: $180 \text{ км} : 2 = 90 \text{ км}$.

Аналогичные зависимости существуют и между другими величинами, рассматриваемыми в начальных классах. Например, такими, как:

- а) стоимость товара, его количество и цена;
- б) объём работы, время работы и производительность труда,
- в) количество ткани, количество изделий и расход на одно изделие.

Дополнительный материал

Из истории развития системы единиц величин

Человек давно осознал необходимость измерять разные величины, причем измерять как можно точнее. Основой точных измерений являются удобные, четко определенные единицы величин и точно воспроизводимые эталоны (образцы) этих единиц. В свою очередь, точность эталонов отражает уровень развития науки, техники и промышленности страны, говорит о ее научно-техническом потенциале.

В истории развития единиц величин можно выделить несколько периодов.

Самым древним является период, когда единицы длины отождествлялись с названием частей человеческого тела. Так, в качестве единиц длины применяли ладонь (ширина четырех пальцев без большого), локоть (длина локтя), фут (длина ступни), дюйм (длина сустава большого пальца) и др. В качестве единиц площади в этот период выступали: колодец (площадь, которую можно полить из одного колодца), соха или плуг (средняя площадь, обработанная за день сохой или плугом) и др.

В XIV—XVI вв. появляются в связи с развитием торговли так называемые объективные единицы измерения величин. В Англии, например, дюйм (длина трех приставленных друг к другу ячменных зерен), фут (ширина 64 ячменных зерен, положенных бок о бок).

В качестве единиц массы были введены гран (масса зерна) и карат (масса семени одного из видов бобов).

Следующий период в развитии единиц величин — введение единиц, взаимосвязанных друг с другом. В России, например, такими были единицы длины миля, верста, сажень и аршин; 3 аршина составляли сажень, 500 саженей — версту, 7 верст — милю.

Однако связи между единицами величин были произвольными, свои меры длины, площади, массы использовали не только отдельные государства, но и отдельные области внутри одного и того же государства. Особый разнобой наблюдался во Франции, где каждый феодал имел право в пределах своих владений устанавливать свои меры. Такое разнообразие единиц величин тормозило развитие производства, мешало научному прогрессу и развитию торговых связей.

Новая система единиц, которая впоследствии явилась основой для международной системы, была создана во Франции в конце XVIII века, в эпоху Великой французской революции. В качестве основной единицы длины в этой системе принимался **метр**¹ — одна сорокамиллионная часть длины земного меридиана, проходящего через Париж.

Кроме метра, были установлены еще такие единицы: **ар** — площадь квадрата, длина стороны которого равна 10 м; **литр** — объем и вместимость жидкостей и сыпучих тел, равный объему куба с длиной ребра 0,1 м; **грамм** — масса чистой воды, занимающая объем куба с длиной ребра 0,01 м.

Были введены также десятичные кратные и дольные единицы, образуемые с помощью приставок: мириа (10^4), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), милли (10^{-3}).

Единица массы **килограмм** был определен как масса 1 дм³ воды при температуре 4 °С.

Так как все единицы величин оказались тесно связанными с единицей длины метром, то новая система величин получила название **метрической системы мер**.

В соответствии с принятыми определениями были изготовлены платиновые эталоны метра и килограмма: метр представляла линейка с нанесенными на ее концах штрихами, а килограмм — цилиндрическая гиря. Эти эталоны передали на хранение Национальному архиву Франции, в связи с чем они получили названия «архивный метр» и «архивный килограмм».

Создание метрической системы мер было большим научным достижением² — впервые в истории появились меры, образующие стройную систему, основанные на образце, взятом из природы, и тесно связанные с десятичной системой счисления.

Но уже скоро в эту систему пришлось вносить изменения. Оказалось, что длина меридиана была определена недостаточно точно. Более того, стало ясно, что по мере развития науки и техники значение этой величины будет уточняться. Поэтому от единицы длины, взятой из природы, пришлось отказаться. Метром стали считать расстояние между штрихами, нанесенными на концах архивного метра, а килограммом — массу эталона архивного килограмма.

Не сразу метрическая система мер получила признание. Даже через 100 лет (в 1875 г.) только 17 государств подписали Метрическую конвенцию «для обеспечения международного единства измерений и усовершенствования метрической системы мер». В настоящее время эта конвенция подписана 60 государствами.

В России метрическая система мер начала применяться наравне с русскими национальными мерами начиная с 1899 года, когда был принят специальный закон, проект которого был разработан выдающимся русским ученым Д. И. Менделеевым. Специальными постановлениями Советского государства был узаконен переход на метрическую систему мер сначала РСФСР (1918 г.), а затем и полностью СССР (1925 г.).

Созданная в XVIII веке, метрическая система мер отвечала уровню развития науки и измерительной техники того времени и, конечно, не могла быть стабильной. С целью укрепления сотрудничества по совершенствованию системы единиц величин в 1921 году было создано Международное бюро мер и весов. Руководит им Международный комитет мер и весов, а законодательным органом является Генеральная конференция по мерам и весам, проводимая один раз в шесть лет.

Бурное развитие науки и производства в XX веке привело к тому, что к 50-м годам возникло множество различных систем единиц, дополняющих и развивающих метрическую систему мер. Со всей остротой встала проблема создания единой универсальной системы единиц величин. Большую работу по ее решению провел Международный комитет мер и весов. Она завершилась принятием в 1960 году XI Генеральной конференцией мер и весов решения о введении Международной системы единиц (СИ)¹.

Международная система единиц

Международная система единиц (СИ) — это единая универсальная практическая система единиц для всех отраслей науки, техники, народного хозяйства и преподавания. Так как потребность в такой системе единиц, являющейся единой для всего мира, была велика, то за короткое время она получила широкое международное признание и распространение во всем мире.

В этой системе семь основных единиц (метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела) и две дополнительные единицы (радиан истерадиан).

Как известно, единица длины метр и единица массы килограмм входили и в метрическую систему мер. Какие изменения претерпели они, войдя в новую систему? Введено новое определение метра — он рассматривается как расстояние, которое проходит в вакууме плоская

электромагнитная волна за $\frac{1}{299\,792\,458}$ долей секунды. Переход на это определение метра вызван ростом требований к точности измерений, а также стремлением иметь такую единицу величины, которая существует в природе и остается неизменной при любых условиях.

Определение единицы массы килограмма не изменилось, по-прежнему килограмм — это масса цилиндра из платино-иридиевого сплава, изготовленного в 1889 году. Хранится этот эталон в Международном бюро мер и весов в г. Севре (Франция).

Третьей основной единицей Международной системы является единица времени секунда. Она намного старше метра.

До 1960 года секунду определяли как $\frac{1}{86\,400}$ часть солнечных суток, т. е. секунда определялась по вращению Земли вокруг своей оси. Это было сделано с таким расчетом, чтобы сохранить привычные отношения между различными единицами времени. При таком определении в сутках содержится 86 400 с, что составляет 1440 мин, или 24 ч.

В 1960 году Генеральная конференция мер и весов приняла решение о переходе к единице времени, основанной на движении Земли по орбите во-

круг Солнца. Секунду определили как $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$ часть года. Новое определение учитывало непостоянство средних солнечных суток и значительно повысило точность ее воспроизведения. Однако и это определение не удовлетворило ученых. В 1967 году секунду определили следующим образом: «Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133». В настоящее время имеется более точное определение секунды.

Вообще развитие науки и техники постоянно вносит свои коррективы в определения единиц величин.

Измерять на практике все длины в метрах, массы в килограммах, время в секундах неудобно. Поэтому из основных единиц образуют другие единицы — кратные и дольные. Кратные единицы

в 10 , 10^2 , 10^3 , 10^6 , 10^9 , 10^{12} , 10^{15} , 10^{18} раз больше основной, а дольные составляют 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-6} , 10^{-9} , 10^{-12} , 10^{-15} , 10^{-18} основной единицы. Названия новых (кратных и дольных) единиц образуются из названий «метр», «грамм», «секунда» и других с помощью приставок, указанных в таблице 1:

Наименование приставки	Обозначение приставки	Множитель	Наименование приставки	Обозначение приставки	Множитель
мега	М	10^6	санти	с	10^{-2}
кило	К	10^3	милли	м	10^{-3}
гекто	Г	10^2	микро	мк	10^{-6}
дека	Да	10	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}			

Например, километр — это кратная единица, $1 \text{ км} = 10^3 \cdot 1 \text{ м} = 1000 \text{ м}$; миллиметр — это дольная единица, $1 \text{ мм} = 10^{-3} \cdot 1 = 0,001 \text{ м}$.

Вообще, для длины кратной единицей являются километр (км), а дольными — сантиметр (см), миллиметр (мм), микрометр (мкм), нанометр (нм). Для массы кратной единицей является мегаграмм (Мг), а дольными — грамм (г), миллиграмм (мг), микрограмм (мкг). Для времени кратной единицей является килосекунда (кс), а дольными — миллисекунда (мс), микросекунда (мкс), наносекунда (нс).

Величины, которые определяются через длину, массу и время, называют производными величинами. Их единицы должны быть согласованы с основными.

Назовем некоторые производные величины и их единицы.

1. **Площадь.** Единицы площади — квадратный метр (м^2), квадратный километр (км^2), квадратный дециметр (дм^2), квадратный сантиметр (см^2), квадратный миллиметр (мм^2).

2. **Объем, вместимость.** Единицы объема — кубический метр (м^3), кубический дециметр (дм^3), кубический сантиметр (см^3), кубический миллиметр (мм^3), литр (л), гектолитр (гл), миллилитр (мл).

В СИ литр рассматривается как особое наименование кубического дециметра, т.е. $1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3$.

3. **Скорость.** Единицы скорости — метр в секунду (м/с), километр в час (км/ч), сантиметр в секунду (см/с).

Единицы величин, применяемые в нашей стране, их наименования, обозначения и правила применения устанавливаются Государственным стандартом (ГОСТом). В соответствии с ним используется Международная система единиц, а также определена группа внесистемных единиц, которые разрешается использовать наряду с единицами СИ. В частности, для массы разрешается применение такой единицы, как тонна (т); для времени — минута (мин), час (ч), сутки (сут), неделя, месяц, год, век; для площади — гектар (га); для температуры — градус Цельсия ($^{\circ}\text{C}$).

Заметим, что такие единицы, как центнер (для массы) и ар (для площади), изъяты из употребления согласно ГОСТу.

Следует обратить внимание и на правильное употребление терминов, связанных с единицами величин. Эти правила также установлены ГОСТом. Так, вместо термина «единица величины» не допускается применять термин «единица измерения величины», поскольку термин «измерение» определяют через понятие величины и включение слова «измерение» в термин «единица величины» приводит к порочному кругу в определениях. Следовательно, надо говорить и писать: «Метр — единица длины», «Грамм — единица массы», «Час — единица времени».

